

A. Probabilités : exercices 1 à 12

Justifier les réponses. Donner les valeurs exactes, puis arrondir au millième si nécessaire.

Exercice 1 — Manipuler les notations

On donne $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,3$.

1. Traduire par une phrase $P_A(B)$ et $P_B(A)$, puis les calculer.
2. Calculer $P_A(\bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap B)$.
3. Calculer $P_{\bar{A}}(B)$.

Exercice 2 — Un sondage au lycée

Parmi 200 élèves, 120 pratiquent un sport et 80 jouent d'un instrument. Parmi les sportifs, 50 jouent d'un instrument. On choisit un élève au hasard et on note S : « pratiquer un sport » et I : « jouer d'un instrument ».

1. Construire un tableau d'effectifs à double entrée croisant S , $\bar{S}$ et I , $\bar{I}$, avec les totaux.
2. Calculer $P(S \cap I)$, $P_S(I)$ et $P_I(S)$.
3. Calculer la probabilité que l'élève ne pratique aucun sport sachant qu'il ne joue d'aucun instrument.

Exercice 3 — Construire un arbre

On sait que $P(A) = 0,35$, $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,2$.

1. Construire un arbre pondéré en indiquant les six probabilités des branches.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$, puis $P(B)$.
3. Calculer $P_B(A)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4 — Transport et ponctualité

Dans un lycée, 40 % des élèves viennent en bus. Parmi eux, 15 % arrivent en retard, contre 5 % des autres élèves. On choisit un élève au hasard et on note B : « venir en bus » et R : « arriver en retard ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que l'élève vienne en bus et arrive en retard, puis $P(R)$.
3. L'élève est en retard. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

Exercice 5 — Deux tirages sans remise

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire au hasard deux boules successivement, sans remettre la première. On note R_i : « la boule du i -ième tirage est rouge ».

1. Construire l'arbre pondéré des deux tirages.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges, puis deux boules de couleurs différentes.
3. Calculer $P(R_2)$, puis $P_{R_2}(R_1)$.

Exercice 6 — Reconnaître l'indépendance

Dans chaque cas, déterminer si A et B sont indépendants en justifiant par un calcul.

1. $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,24$.
2. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,2$.
3. $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,7$ et $P_A(B) = 0,7$.
4. A et B sont incompatibles, avec $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$.

A. Probabilités (suite)

Exercice 7 — Trois ateliers

Une usine répartit sa production entre trois ateliers : 50 % pour A, 30 % pour B et 20 % pour C. Leurs taux de pièces défectueuses sont respectivement 1 %, 3 % et 5 %. On choisit une pièce au hasard et on note D : « la pièce est défectueuse ».

1. Construire un arbre pondéré à trois branches au premier niveau.
2. Calculer $P(D)$, puis la probabilité que la pièce soit conforme.
3. Sachant que la pièce est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle provienne de C.

Exercice 8 — Retrouver une probabilité

Un site confie 60 % de ses colis au transporteur A et les autres au transporteur B. A livre 95 % de ses colis à l'heure. Au total, 92 % des colis arrivent à l'heure.

1. Tracer un arbre en notant x la probabilité qu'un colis confié à B arrive à l'heure.
2. À l'aide des probabilités totales, établir une équation et déterminer x .
3. Un colis est arrivé en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été confié à B ?

Exercice 9 — Un contrôle automatique

Dans un lot, 4 % des pièces présentent un défaut. Un appareil rejette 90 % des pièces défectueuses, mais rejette aussi 5 % des pièces conformes. On choisit une pièce au hasard. On note D : « avoir un défaut » et R : « être rejetée ».

1. Construire l'arbre pondéré, puis calculer $P(R)$.
2. Calculer $P_R(D)$. Une pièce rejetée est-elle nécessairement défectueuse ?
3. Calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit défectueuse.

Exercice 10 — Deux urnes

On lance un dé équilibré. Si le résultat est 1 ou 2, on choisit l'urne A ; sinon, l'urne B. A contient 3 boules rouges et 2 bleues ; B contient 1 rouge et 4 bleues. On tire ensuite une boule au hasard dans l'urne choisie.

1. Construire un arbre pondéré décrivant l'expérience.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
3. La boule tirée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?

Exercice 11 — Atteindre un objectif

Une entreprise utilise deux machines A et B. A produit 1 % de pièces défectueuses et B en produit 4 %. On note $x \in [0; 1]$ la proportion de la production confiée à A.

1. Exprimer en fonction de x la probabilité $P(D)$ qu'une pièce choisie au hasard soit défectueuse.
2. Déterminer la part minimale à confier à A pour que $P(D) \leq 0,02$.
3. On choisit $x = 0,8$. Une pièce est défectueuse : calculer la probabilité qu'elle provienne de A.

Exercice 12 — Indépendance et tirages

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire au hasard deux boules successivement. On note R_1 et R_2 les événements « obtenir une rouge au premier tirage » et « obtenir une rouge au second tirage ».

1. **Avec remise** : construire un arbre, calculer $P(R_1)$, $P(R_2)$ et $P(R_1 \cap R_2)$, puis montrer que R_1 et R_2 sont indépendants.
2. **Sans remise** : reprendre les calculs. Les événements sont-ils encore indépendants ?
3. Dans le cas avec remise, R_1 et R_2 sont-ils incompatibles ? Justifier.

B. Variables aléatoires : exercices 13 à 22

Présenter chaque loi dans un tableau. Garder les valeurs exactes dans les calculs ; arrondir les écarts-types au centième.

Exercice 13 — Lire une loi de probabilité

La loi d'une variable aléatoire X est donnée par :

x_i	-2	0	3	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer $P(X \geq 3)$, $P(X < 3)$ et $P(-2 < X \leq 3)$.
3. Calculer $E(X)$.

Exercice 14 — Compléter une loi

Une variable aléatoire X prend les valeurs -1 , 2 et 4 avec les probabilités respectives $0,25$, p et $0,35$.

1. Déterminer p , puis dresser le tableau de la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et $P(X > E(X))$.
3. Calculer $V(X)$, puis $\sigma(X)$.

Exercice 15 — Un gain associé à un dé

On lance un dé équilibré à six faces. Le gain algébrique X , en euros, vaut -3 si l'on obtient 1 ou 2, 0 si l'on obtient 3, 4 ou 5, et 9 si l'on obtient 6.

1. Déterminer la loi de X et la probabilité de gagner strictement de l'argent.
2. Calculer $E(X)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 16 — Deux lancers d'une pièce

On lance deux fois, de manière indépendante, une pièce équilibrée. On note X le nombre de résultats « pile » obtenus.

1. Représenter les quatre issues équiprobables par un arbre ou une liste.
2. Déterminer la loi de X , puis $P(X \geq 1)$.
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 17 — Somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, de manière indépendante. On note X la somme des résultats.

1. Construire un tableau à double entrée des 36 issues équiprobables et des sommes obtenues.
2. Déterminer la loi de X , puis calculer $P(X \geq 10)$.
3. Calculer $E(X)$ et expliquer pourquoi cette valeur est cohérente avec la symétrie de la loi.

B. Variables aléatoires (suite)

Exercice 18 — Une tombola

Une tombola propose 100 tickets à 3 euros chacun. Un ticket rapporte 50 euros, neuf rapportent 10 euros et les autres ne rapportent rien. On achète un ticket au hasard et on note X le gain algébrique, après déduction du prix du ticket.

1. Déterminer les valeurs de X et sa loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter son signe du point de vue du joueur.
3. Quel devrait être le prix du ticket pour rendre le jeu équitable, en conservant les mêmes lots ?

Exercice 19 — Comparer deux jeux

Deux jeux ont les gains algébriques suivants, en euros :

x_i	-1	3
$P(X = x_i)$	0,5	0,5

y_i	-5	7
$P(Y = y_i)$	0,5	0,5

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Peut-on départager les jeux avec ce seul critère ?
2. Calculer leurs variances et leurs écarts-types.
3. Quel jeu choisir pour avoir les gains les moins dispersés autour de la moyenne ? Justifier.

Exercice 20 — Fixer un lot

Une roue comporte 8 secteurs de même taille, équiprobables. Cinq ne rapportent rien, deux rapportent 4 euros et le dernier rapporte L euros, avec $L \geq 0$. Une partie coûte 2 euros. On note X le gain algébrique du joueur.

1. Pour $L = 12$, déterminer la loi de X et son espérance.
2. Pour un L quelconque, montrer que $E(X) = \frac{L - 8}{8}$.
3. Déterminer L pour que le jeu soit équitable, puis les valeurs de L qui rendent le jeu favorable au joueur.

Exercice 21 — Nombre de boules rouges

Une urne contient 3 boules rouges et 2 bleues. On tire au hasard deux boules successivement, sans remise. On note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Construire un arbre pondéré et déterminer la loi de X .
2. Calculer $P(X \geq 1)$ et $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$, puis $\sigma(X)$.

Exercice 22 — Synthèse : un service de livraison

Une entreprise assure 70 % de ses livraisons en zone A, les autres en zone B. Le taux de retard est de 10 % en A et 20 % en B. Pour une livraison choisie au hasard, elle verse une indemnité X : 0 euro sans retard, 5 euros en cas de retard en A, 8 euros en cas de retard en B.

1. Construire un arbre pondéré, puis déterminer la loi de X .
2. Calculer $E(X)$ et estimer le montant total des indemnités pour 1 000 livraisons de même répartition.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.