

1. Probabilités conditionnelles

Notations : $A \cap B$ signifie « A et B » ; $A \cup B$ signifie « A ou B » ; $\bar{A}$ est l'événement contraire de A , avec $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Conditionner et calculer une intersection

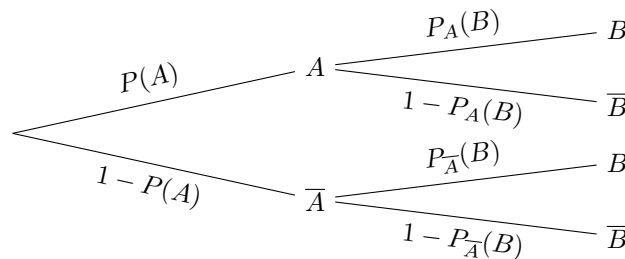
Si $P(A) > 0$, la probabilité de B sachant A est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

On note aussi $P(B | A)$. De plus, $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.

Attention : en général, $P_A(B) \neq P_B(A)$. L'événement placé en indice est celui que l'on sait réalisé.

2. Lire un arbre pondéré



- La somme des probabilités issues d'un même nœud vaut 1.
- On **multiplie** les probabilités des branches d'un chemin pour obtenir sa probabilité.
- On **additionne** les probabilités des chemins conduisant à un même événement.

3. Formule des probabilités totales

Décomposer selon les cas possibles

Si $0 < P(A) < 1$, les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers :

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B).$$

Plus généralement, si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, recouvrent tout l'univers et ont des probabilités non nulles :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B).$$

4. Indépendance de deux événements

Définition et critères

A et B sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Si $P(A) > 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B . Si $P(B) > 0$, on a aussi $P_B(A) = P(A)$.

Si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont aussi.

Attention : indépendants ne signifie pas incompatibles. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont pas indépendants, car $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

5. Variables aléatoires : rappels de première spécialité

Définition et loi de probabilité

Une **variable aléatoire réelle** X associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire. On note $x_1, \dots, x_n$ ses valeurs possibles.

La **loi de probabilité** de X donne la probabilité de chacune de ces valeurs :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad p_1 + \dots + p_n = 1.$$

Pour calculer $P(X \leq a)$, on additionne les probabilités des valeurs $x_i \leq a$. De même, $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.

Espérance : la moyenne théorique

$$E(X) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Sur un grand nombre de répétitions indépendantes de la même expérience, la moyenne des valeurs observées tend à se rapprocher de $E(X)$.

Si X désigne le **gain algébrique du joueur** (somme reçue moins la mise), le jeu est : **équitable** si $E(X) = 0$, **favorable** si $E(X) > 0$, **défavorable** si $E(X) < 0$.

Variance et écart-type : la dispersion

En notant $\mu = E(X)$:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - \mu^2 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

La variance est positive ou nulle. L'écart-type mesure la dispersion autour de l'espérance : il s'exprime dans la même unité que X .

Exemple express

On lance un dé équilibré. Le gain X vaut -2 euros si l'on obtient 1, 2 ou 3 ; 1 euro si l'on obtient 4 ou 5 ; 4 euros si l'on obtient 6.

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$P(X > 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 0 \quad (\text{jeu équitable}),$$

$$V(X) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{6} - 0^2 = 5, \quad \sigma(X) = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ euros}.$$

Méthode

Lister les valeurs possibles, calculer leurs probabilités et vérifier que leur somme vaut 1. Calculer ensuite $E(X)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$ en gardant les valeurs exactes jusqu'au résultat final.