

1 Les ensembles de nombres

1.1 Les entiers naturels \mathbb{N}

Définition

L'ensemble \mathbb{N} est l'ensemble des **entiers naturels** :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Il contient uniquement les entiers positifs ou nuls.

Exemple

$$0 \in \mathbb{N}, \quad 5 \in \mathbb{N}, \quad -3 \notin \mathbb{N}, \quad 1,5 \notin \mathbb{N}$$

1.2 Les entiers relatifs \mathbb{Z}

Définition

L'ensemble \mathbb{Z} est l'ensemble des **entiers relatifs** :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Il contient tous les entiers, positifs, négatifs et zéro.

Exemple

$$-7 \in \mathbb{Z}, \quad 0 \in \mathbb{Z}, \quad 12 \in \mathbb{Z}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

1.3 Les décimaux \mathbb{D}

Définition

L'ensemble \mathbb{D} est l'ensemble des **nombres décimaux** :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Un nombre décimal est un nombre qui admet une écriture décimale finie.

Exemple

$$3,5 \in \mathbb{D}, \quad -2,75 \in \mathbb{D}, \quad 0,125 \in \mathbb{D}, \quad 1,333\dots \notin \mathbb{D}$$

1.4 Les rationnels \mathbb{Q}

Définition

L'ensemble \mathbb{Q} est l'ensemble des **nombres rationnels**, c'est-à-dire les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Un nombre rationnel peut avoir une écriture décimale finie ou infinie périodique.

Exemple

$$\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \quad -\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}, \quad 0,75 = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

1.5 Les réels \mathbb{R} **Définition**

L'ensemble \mathbb{R} est l'ensemble des **nombre réels**. Il contient tous les rationnels ainsi que les **irrationnels**, c'est-à-dire les nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction.

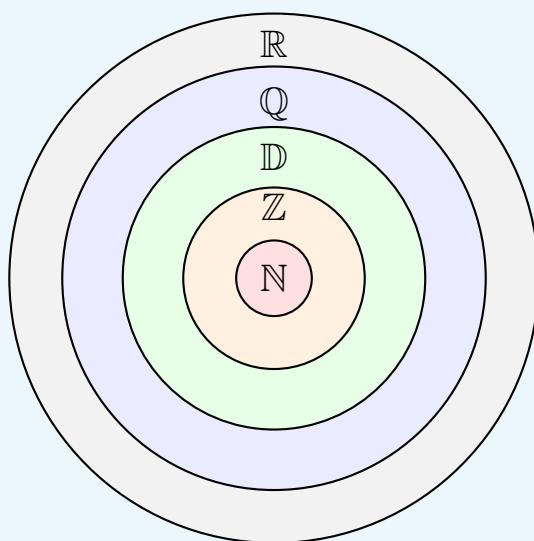
Exemple

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$

Définition

Les nombres sont regroupés en ensembles emboîtés les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



2 Les intervalles

Définition

Un **intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux bornes a et b .

- $[a; b]$: intervalle **fermé** — a et b sont inclus $a \leq x \leq b$
- $]a; b[$: intervalle **ouvert** — a et b sont exclus $a < x < b$
- $[a; b[$: intervalle **semi-ouvert** — a inclus, b exclu $a \leq x < b$
- $[a; +\infty[$: demi-droite — tous les réels $\geq a$ $x \geq a$
- $] -\infty; b]$: demi-droite — tous les réels $\leq b$ $x \leq b$

Exemple

Intervalle	Inégalité	Représentation

3 Valeur absolue et distance

Définition

La **valeur absolue** d'un réel a , notée $|a|$, est sa distance à 0 sur la droite numérique :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propriété

La **distance** entre deux réels a et b sur la droite numérique est $|b - a|$.

Exemple

$$|-5| = 5, \quad |3| = 3, \quad |-7 - 2| = |-9| = 9$$

Méthode : Résoudre $|x - a| \leq r$

Résoudre $|x - 1| \leq 3$ signifie que x est à distance au plus 3 de 1 :

$$|x - 1| \leq 3 \iff -3 \leq x - 1 \leq 3 \iff -2 \leq x \leq 4$$

Solution : $x \in [-2; 4]$