

1. Suites générales

Exercice 1 — Calculer des termes avec une formule explicite

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

a) $u_n = 2n$

b) $v_n = 3n^2 - 1$

c) $w_n = 5 - n$

d) $a_n = n^2 + 2n$

Exercice 2 — Calculer des termes avec une relation de récurrence

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = w_n + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$$

Exercice 3 — Des récurrences particulières

Pour chacune des suites suivantes, calculer les termes de rang 0 à 5 en détaillant les calculs des termes non donnés. Les relations sont valables pour tout entier $n \geq 0$.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - n \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = 1, & w_1 = 2 \\ w_{n+2} = w_{n+1} + w_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 = 0, & b_1 = 1 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + n \end{cases}$$

Attention : n désigne le rang, tandis que u_n désigne la valeur d'un terme. Pour une relation donnant le terme de rang $n + 2$, commencer avec $n = 0$ pour calculer le terme de rang 2.

Exercice 4 — Ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 3n + 2$.

- Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
- Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
- Exprimer $u_n + 1$ en fonction de n .
- Comparer u_{n+1} et $u_n + 1$.

2. Suites arithmétiques

Exercice 5 — Exprimer des termes de rang différent

Les suites suivantes sont définies pour tout entier $n \geq 0$. Exprimer les termes demandés en fonction de n , puis simplifier lorsque c'est possible.

- $u_n = 5n - 2$. Exprimer u_{n+1} et u_{n+2} .
- $v_n = n^2 + 3n$. Exprimer v_{n+1} et v_{n-1} (pour $n \geq 1$), puis développer et réduire.
- $w_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Exprimer w_{n+1} et w_{2n} .
- $a_n = 3 \times 2^n$. Exprimer a_{n+1} en fonction de n , puis en fonction de a_n .

Indication : pour obtenir u_{n+1} , remplacer chaque n de la formule par $(n+1)$. De même, pour u_{2n} , remplacer chaque n par $2n$.

Exercice 6 — Démontrer qu'une suite est arithmétique

Pour chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geq 0$, montrer qu'elle est arithmétique en calculant la différence de deux termes consécutifs. Préciser sa raison et son premier terme.

$$u_n = 6n - 5.$$

$$v_n = 3(2n - 1) - 4(n + 2).$$

$$w_n = (n + 2)^2 - n^2.$$

$$b_n = \frac{3n^2 + 7n + 2}{n + 2}.$$

Indication pour b_n : factoriser le numérateur ; le dénominateur est non nul pour $n \geq 0$.

Pour aller plus loin. On définit la suite (c_n) par : $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = c_n + 2n + 3$ pour tout entier $n \geq 0$. On pose $d_n = c_n - n^2$.

- a) Exprimer $d_{n+1} - d_n$ à l'aide de c_{n+1} , de c_n et de n , puis simplifier.
- b) En déduire que (d_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme.

Rappel : vérifier quelques termes ne suffit pas. Il faut montrer que la différence est constante pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 7 — Expression explicite d'une suite arithmétique

Pour chaque suite arithmétique, donner l'expression de u_n en fonction de n , puis calculer le terme demandé.

- a) $u_0 = 4$ et $r = -2$. Calculer u_5 .
- b) $u_0 = 7$ et $r = 3$. Calculer u_{10} .
- c) $u_2 = 5$ et $r = 4$. Calculer u_8 .

Exercice 8 — Retrouver la raison

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que : $u_3 = 8$ et $u_7 = 20$.

- a) Déterminer la raison r .
- b) Déterminer u_0 .
- c) Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 9 — Calculer des sommes de nombres

- a) En utilisant la même méthode, établir que, pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) Calculer $A = 1 + 2 + \cdots + 50$, puis $B = 21 + 22 + \cdots + 50$.
- c) Calculer $C = 2 + 4 + \cdots + 40$

Exercice 10 — Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

- a) Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_{20} .
- b) Combien de termes contient $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$? Calculer S .
- c) Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite. Expliquer pourquoi elle est différente de S .
- d) Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n .

Exercice 11 — Somme de termes arithmétiques entre deux rangs

On considère la suite arithmétique (v_n) définie pour $n \geq 1$, de premier terme $v_1 = 50$ et de raison -2 .

- a) Calculer v_5 et v_{18} .
- b) Déterminer le nombre de termes de $T = v_5 + v_6 + \cdots + v_{18}$, puis calculer T .
- c) Retrouver le résultat en faisant la différence de deux sommes commençant au rang 1.
- d) Calculer $A = 7 + 11 + 15 + \cdots + 103$ après avoir déterminé le nombre de termes.

3. Suites géométriques

Exercice 12 — Démontrer qu'une suite est géométrique

Pour chacune des suites suivantes, définies pour tout entier $n \geq 0$, montrer qu'elle est géométrique en établissant une relation de la forme $u_{n+1} = q u_n$, où q est constant. Préciser sa raison et son premier terme.

$$u_n = 3 \times 5^n. \quad v_n = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \quad w_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}. \quad a_n = 2^{2n+1}. \quad b_n = 5^{n+1} - 2 \times 5^n.$$

Indication pour b_n : factoriser par 5^n . **Pour aller plus loin.** On définit la suite (c_n) par

$$c_0 = 5 \quad \text{et} \quad c_{n+1} = 2c_n - 3 \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

On pose $d_n = c_n - 3$.

- Exprimer d_{n+1} en fonction de c_n , puis de d_n .
- En déduire que (d_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme.

Rappel : vérifier quelques termes ne suffit pas. Il faut établir la relation pour tout entier $n \geq 0$. On peut aussi montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant, après avoir vérifié que les termes au dénominateur sont non nuls.

Exercice 13 — Expression explicite d'une suite géométrique

Pour chaque suite géométrique, donner l'expression de u_n en fonction de n , puis calculer le terme demandé.

- $u_0 = 3$ et $q = 2$. Calculer u_6 .
- $u_0 = 80$ et $q = \frac{1}{2}$. Calculer u_4 .
- $u_2 = 12$ et $q = 3$. Calculer u_5 .

Exercice 14 — Retrouver la raison

Soit (u_n) une suite géométrique telle que :

$$u_1 = 6 \quad \text{et} \quad u_4 = 162.$$

- Déterminer la raison q .
- Déterminer u_0 .
- Donner l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 15 — Somme des premiers termes d'une suite géométrique

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

- Exprimer u_n en fonction de n , puis calculer u_8 .
- Combien de termes contient $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_8$? Écrire S sous la forme $3(1 + 2 + \cdots + 2^8)$, puis calculer sa valeur exacte.
- Calculer la somme des 8 premiers termes de la suite.
- Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n .

Exercice 16 — Sommes géométriques : varier les rangs et les raisons

Pour chaque somme, préciser le premier terme, la raison et le nombre de termes, puis calculer sa valeur exacte.

- a) $A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^6$.
- b) $B = v_3 + v_4 + \cdots + v_7$, où $v_n = 5 \times 3^n$ pour $n \geq 0$.
- c) $C = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + (-2)^7$.
- d) $D = w_4 + w_5 + \cdots + w_{12}$, où (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = 7$ et de raison 1. Pourquoi faut-il traiter ce cas séparément ?

4. Exercices bilan : problèmes de modélisation

Justifier les réponses et préciser les unités. La calculatrice est autorisée. Pour les recherches de seuil, donner les deux valeurs consécutives qui encadrent le seuil. Conserver les valeurs non arrondies dans les calculs intermédiaires.

Exercice 17 — Préparer une course

Lors de sa première semaine d'entraînement, Lina court au total 12 km. Elle prévoit d'augmenter cette distance de 1,5 km chaque semaine, pendant 12 semaines. On note d_n la distance parcourue pendant la semaine de rang n , la première semaine correspondant à $n = 1$.

- a) Donner d_1 , puis calculer d_2 et d_3 .
- b) Traduire le programme par une relation entre d_{n+1} et d_n . Préciser la nature de la suite et sa raison.
- c) Exprimer d_n en fonction de n , pour $1 \leq n \leq 12$. Quelle distance Lina prévoit-elle de courir pendant la dernière semaine ?
- d) À partir de quelle semaine la distance hebdomadaire atteint-elle au moins 24 km ?
- e) Calculer la distance totale parcourue au cours des 12 semaines. L'objectif de parcourir au moins 250 km au total est-il atteint ?

Exercice 18 — Une réserve d'eau de pluie

Une cuve contient initialement 950 litres d'eau. Chaque soir, on prélève 65 litres pour arroser un jardin. On suppose qu'il ne pleut pas et qu'il n'y a aucune autre perte d'eau. On note v_n le volume d'eau, en litres, restant après n arrosages complets ; ainsi $v_0 = 950$.

- a) Calculer v_1 et v_2 , puis établir la relation de récurrence valable tant qu'un arrosage complet est possible.
- b) Préciser la nature de la suite et exprimer v_n en fonction de n sur la durée de validité du modèle.
- c) Une alerte se déclenche lorsque le volume restant est strictement inférieur à 300 litres. Après combien d'arrosages se déclenche-t-elle pour la première fois ?
- d) Combien d'arrosages complets peut-on effectuer au maximum ? Quel volume reste-t-il alors ?
- e) La formule de la question b) donne une valeur négative pour $n = 15$. Expliquer pourquoi cette valeur n'a pas de sens dans la situation et préciser les rangs admissibles pour le modèle.

Exercice 19 — La valeur d'un vélo électrique

Un vélo électrique neuf coûte 2 400 euros. Pour estimer sa valeur de revente, on suppose qu'il perd chaque année 18 % de sa valeur de l'année précédente. On note p_n sa valeur estimée, en euros, après n années ; ainsi $p_0 = 2\,400$.

- a) Calculer p_1 et p_2 . La perte en euros est-elle la même pendant chacune des deux premières années ?
- b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n . Préciser la nature de la suite et sa raison.
- c) Donner une expression de p_n en fonction de n , puis estimer la valeur du vélo après 5 ans, à l'euro près.
- d) À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer après combien d'années sa valeur devient pour la première fois strictement inférieure à 1 000 euros.
- e) Un vendeur affirme : « En cinq ans, le vélo perd $5 \times 18 \% = 90 \%$ de sa valeur initiale. » Expliquer son erreur et calculer le pourcentage réel de baisse prévu par le modèle, à 0,1 point près.

Exercice 20 — Développer une production

Un atelier fabrique 800 pièces pendant son premier mois d'activité. Il prévoit d'augmenter sa production mensuelle de 5 % chaque mois pendant la première année. On note a_n le nombre de pièces prévu par le modèle pendant le mois de rang n , avec $a_1 = 800$. Les valeurs du modèle ne sont pas nécessairement entières ; on arrondira seulement les résultats finaux à l'unité.

- Calculer a_2 et a_3 , puis établir une relation entre a_{n+1} et a_n .
- Préciser la nature de la suite et montrer que $a_n = 800 \times 1,05^{n-1}$ pour $1 \leq n \leq 12$.
- Estimer la production du douzième mois.
- On note $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{12}$ la production totale prévue pendant la première année. Écrire S sous la forme $800(1 + q + \dots + q^{11})$, puis calculer S à l'aide d'une formule du cours.
- Une commande de 12 000 pièces doit être livrée à la fin de l'année. En supposant que toute la production lui est réservée, l'atelier peut-il l'honorer ?

Exercice 21 — Comparer deux contrats de maintenance

Une association compare deux contrats pour l'entretien de son matériel. La première année, chacun coûte 600 euros. Avec le contrat A, le tarif annuel augmente ensuite de 35 euros chaque année. Avec le contrat B, il augmente de 5 % chaque année. On note A_n et B_n les tarifs, en euros, de la $(n + 1)$ -ième année ; ainsi $A_0 = B_0 = 600$.

- Calculer A_1, A_2, B_1 et B_2 .
- Définir chaque suite par récurrence, préciser sa nature et donner son expression explicite.
- Quel contrat propose le tarif le plus faible pour la cinquième année ? Préciser le rang utilisé.
- À l'aide d'un tableau de valeurs, déterminer la première année où le tarif du contrat B devient strictement supérieur à celui du contrat A.
- Calculer le coût total de chaque contrat sur les dix premières années, au centime près. Quel contrat choisir si le seul critère est ce coût total ?

Exercice 22 — Agrandir un jardin carré

Un jardin carré a initialement un côté de 4 mètres. Chaque année, on augmente sa superficie de 12 mètres carrés tout en conservant sa forme carrée. On note u_n la longueur, en mètres, de son côté après n agrandissements ; ainsi $u_0 = 4$.

- Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 , puis en donner des valeurs approchées au centième.
- En raisonnant sur les aires, justifier que $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 12}$ pour tout entier naturel n .
- On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n^2$. Que représente v_n dans cette situation ? Préciser son unité.
- Montrer que (v_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme, puis exprimer v_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de u_n en fonction de n . Calculer la longueur du côté après 7 agrandissements.
- Déterminer le nombre minimal d'agrandissements nécessaires pour que le côté du jardin atteigne au moins 10 mètres. Justifier en résolvant une inéquation.
- Un élève affirme : « Puisque la superficie augmente chaque année de la même quantité, la longueur du côté aussi. » À l'aide des trois premiers termes, montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique et expliquer l'erreur de cet élève.