

1. Suites générales

1.1 Définition d'une suite

Exemple d'introduction

On considère la liste de nombres formée par tous les nombres pairs rangés dans l'ordre croissant :

$$0, 2, 4, 6, \dots$$

On note (u_n) l'ensemble des termes de cette suite de nombres tel que :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 6, \dots$$

On a ainsi défini une suite numérique.

Définition

Une suite (u_n) est une liste ordonnée de nombres telle qu'à tout entier naturel n , on associe un nombre réel noté u_n .

Les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots$ sont appelés les **termes** de la suite.

L'entier n est appelé le **rang**.

1.2 Suites définies en fonction de n

Définition

Une suite est définie par une **formule explicite** lorsque l'on connaît directement l'expression de u_n en fonction de n .

Dans ce cas, on peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n$.

Alors : $u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 6$.

Exemple 2

Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = 3n^2 - 1$.

Alors : $v_0 = -1, \quad v_1 = 2, \quad v_2 = 11, \quad v_3 = 26$.

1.3 Suites définies par récurrence

Définition

Une suite est définie par **récurrence** lorsque chaque terme s'obtient à partir du terme précédent.

Pour définir une suite par récurrence, il faut donner :

- un premier terme ;
- une relation permettant d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Exemple 1

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

Alors : $u_0 = 5, \quad u_1 = 15, \quad u_2 = 45$

Exemple 2

Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 4v_n - 6 \end{cases}$

Alors : $v_0 = 3, \quad v_1 = 6, \quad v_2 = 18, \quad v_3 = 66$.

■ **remarque** Il ne faut pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.

- u_{n+1} désigne le terme qui suit u_n .
- $u_n + 1$ désigne le terme u_n auquel on ajoute 1.

Pour une suite définie par récurrence, il faut souvent calculer les termes les uns après les autres.

2. Suites particulières

2.1 Suites arithmétiques

Exemple

Considérons la suite (u_n) dans laquelle on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.

Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 8, \quad u_2 = 13, \quad u_3 = 18.$$

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

Définition

Une suite (u_n) est une suite **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.

■ **remarque** La raison peut être un nombre négatif.

Méthode

Pour savoir si une suite est arithmétique, il suffit de montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

★ Démonstration 1

Propriété

Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 . Pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r.$$

ou

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \text{nombre de terme} \times \frac{u_n + u_0}{2}$$

★ Démonstration 2

2.2 Suites géométriques

Exemple

Considérons la suite (u_n) dans laquelle on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.

Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :

$$u_0 = 5, \quad u_1 = 10, \quad u_2 = 20, \quad u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

Définition

Une suite (u_n) est une suite **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

Méthode

Lorsque les termes de la suite ne sont pas nuls, pour savoir si une suite est géométrique, il suffit de montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Propriété

Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$